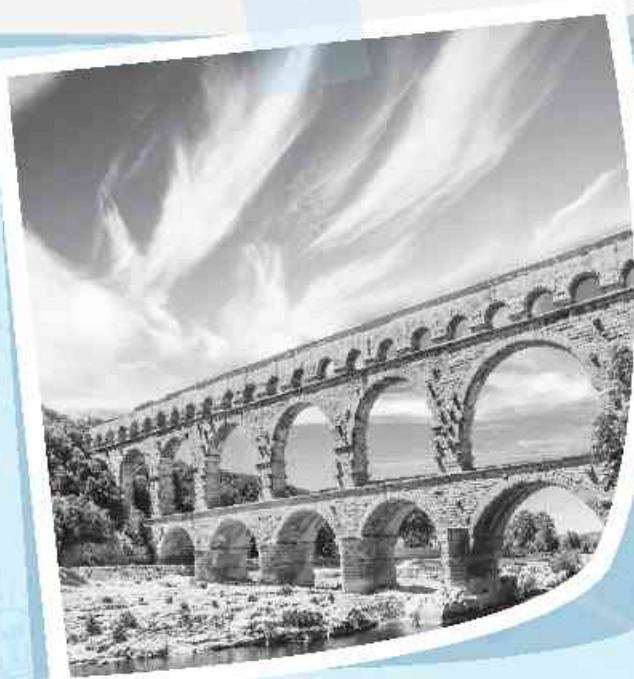


فصل ۱

معادله درجه دوم



معادله و مسائل توصیفی

حل معادله درجه دوم و کاربردها

معادله‌های شامل عبارتهای گویا

معادله درجه دوم

درسنامه ۱

معادله درجه اول

فرض کنید از ما بپرسند کدام عدد است که چهار برابر آن منهای عدد پنج، مساوی دو برابر همان عدد به علاوه عدد سه می‌باشد؟ به نظر شما چه طوری می‌توان این عدد را پیدا کرد؟

برای پیدا کردن این عدد و به طور کلی برای حل این‌گونه مسائل از معادله کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم عدد مورد نظر x باشد، معادل ریاضی جمله‌ای که گفته شده را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 4x - 5 & \xrightarrow{\text{بهای پنج}} 4x & \xrightarrow{\text{برابر ۴}} x \\ 2x + 3 & \xrightarrow{\text{به علاوه سه}} 2x & \xrightarrow{\text{برابر ۲}} x \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{بهم مساوی}} 4x - 5 = 2x + 3$$

حال برای پیدا کردن x ، جملات شامل x را به یک طرف تساوی و اعداد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم و هر طرف را ساده می‌کنیم:

$$4x - 2x = 3 + 5 \Rightarrow 2x = 8$$

اکنون اگر طرفین تساوی را بر ۲ تقسیم کنیم، x به دست می‌آید:

$$x = 4$$

پس عددی که مورد نظر سؤال بود، عدد ۴ است.

در این مسأله، چند مفهوم و تعریف وجود داشت. اولاً معادله‌ای که نوشتیم یک معادله درجه اول است (چون توان متغیر آن ۱ می‌باشد). ثانیاً مراحل حل که برای حل آن به کار بردیم، به اعمال جبری ساده معروف است. ثالثاً به $x = 4$ جواب یا ریشه معادله می‌گویند (زیرا به ازای آن معادله به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌شود). در حالت کلی می‌توانیم بگوییم:

معادله درجه اول: هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند. جواب

این معادله از رابطه $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید (زیرا $ax = -b$ و در نتیجه $x = -\frac{b}{a}$).

اعمال جبری ساده: اعمالی که برای حل یک معادله، مجاز به انجام آن‌ها هستیم، عبارتند از:

۱) جمع کردن طرفین معادله با مقدارهای مساوی

۲) کم کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله

۳) ضرب کردن طرفین معادله در مقدارهای مساوی و مخالف صفر

۴) تقسیم کردن طرفین معادله بر مقدارهای مساوی و مخالف صفر

نکته مهم: ما دو تا سؤال داریم. اول این‌که چرا تو تعریف معادله، گفتین a مخالف صفر باشه؟ دوم این‌که تو اعمال جبری ساده برای ضرب و تقسیم چرا شرط مخالف صفر رو آوردین؟ خوب اگه صفر باشه چی میشه؟

پاسخ: وای بچه‌هون! باز تو عهله کردی. قبلی سؤال‌های فوبی پرسیدی ولی اگه کمی صبر می‌کردی، فوراً همه رو می‌گفتم که چرا! جواب سؤال اولت رو بزار بعداً مفصل توضیح می‌دم ولی سؤال دوم رو همین الان می‌گم چرا. ببین مثلاً ما به معادله به شکل $\frac{5}{4}x = 3$ داریم. اگه بفوایم این رو حل کنیم، باید طرفین تساوی رو در $\frac{4}{5}$ ضرب کنیم تا جواب به دست بیاد که جواب هم $\frac{6}{5}$ می‌شه. اما اگه من طرفین تساوی رو در صفر ضرب می‌کردم، چی می‌شد؟ هیپی! می‌شه $0 = 0$. به چه دردی می‌فورد؟ هیپی، کمکی تو به دست آوردن جواب نمی‌کرد و انکی به یک تساوی بی‌فوردی می‌رسیدیم. برای تقسیم هم همین طور. تو تقسیم که بدتر، چون اصلاً نمی‌شه طرفین رو به صفر تقسیم کرد! یه کار کاملاً بی‌معنی. حالا به توضیحات زیر در مورد سؤال اولت دقت کن.

جواب معادله: هر مقداری که معادله به ازای آن، به یک تساوی عددی درست تبدیل شود، جواب معادله است. پس می‌توانیم بگوییم جواب معادله همواره در خود معادله صدق می‌کند.

حالات های مختلف در معادله $ax + b = 0$:

$a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0 + b = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{b}{0}$	معادله به ازای هیچ x ای درست نیست.
$a = 0, b = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$	معادله به ازای هر x ای درست است.
$a \neq 0, b = 0 \Rightarrow ax + 0 = 0 \Rightarrow ax = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = 0$	معادله فقط جواب صفر دارد.
$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \xrightarrow{a \neq 0} x = -\frac{b}{a}$	معادله دارای یک جواب مخالف صفر است.

پس برای این که معادله $ax + b = 0$ یک معادله درجه اول و دارای جواب باشد، شرط $a \neq 0$ لازم است.

مشاهده بکنیم باشد

- یک معادله درجه اول باید به شکل $ax + b = 0$ باشد و حتماً a مخالف صفر است، جواب آن هم $x = -\frac{b}{a}$ می شود. برای حل یک معادله درجه اول باید:
- اگر در معادله جمله‌هایی وجود دارد که شامل اعمال ضرب و تقسیم یا توان‌رسانی است، اول آن‌ها را انجام دهیم. مثلاً شامل جمله‌هایی مثل $2(x-1)$ یا $(x+2)^2$ باشد.
 - اگر در معادله جمله‌های کسری است، طرفین معادله را در مخارج مشترک کسرها ضرب کنیم (تا مخارج‌ها از بین بروند). مثلاً در معادله $\frac{3x}{2} + 1 = \frac{x-1}{3}$ طرفین را در ۶ ضرب کنیم تا معادله به شکل $9x + 6 = 2x - 2$ در بیاید.
 - جمله‌های دارای مجهول را به یک طرف و جمله‌های معلوم را به طرف دیگر تساوی معادله ببریم. مثلاً در معادله قبل آن را به شکل $9x - 2x = -2 - 6$ بنویسیم. البته این را فراموش نکنیم که وقتی جمله‌ای را از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی می‌بریم، علامتش قرینه می‌شود.
 - در دو طرف تساوی، جمله‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم تا ساده شوند. مثلاً معادله قبل به شکل $7x = -8$ در می‌آید.
 - در مرحله آخر، طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول به دست بیاید. مثلاً جواب معادله بالا می‌شود:

$$\frac{7x}{7} = \frac{-8}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

مثالی جواب‌های معادله‌های زیر را به دست آورید.

(ب) $(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2$

(الف) $5(x-4) = \frac{2(2x+1)}{2}$

پاسخ: (الف) طبق مراحل که در بالا گفتیم حل معادله را پیش می‌بریم تا مطلب کاملاً برایتان جا بیفتد.

$$5(x-4) = \frac{2(2x+1)}{2} \Rightarrow 5x - 20 = \frac{6x+2}{2}$$

۱) در سمت راست و چپ معادله، یک عمل ضرب باید انجام دهیم:

۲) در سمت راست، یک جمله کسری یا مخارج ۲ داریم. پس طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2(5x-20) = 2\left(\frac{6x+2}{2}\right) \Rightarrow 10x - 40 = 6x + 2$$

۳) جمله‌های دارای مجهول را به طرف چپ و جمله‌های معلوم را به طرف راست می‌بریم:

$$10x - 6x = 2 + 40$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$4x = 42$$

۵) طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم تا جواب به دست آید:

$$x = \frac{42}{4}$$

(ب) سمت راست و چپ، یک پرانتز با توان ۲ داریم. حاصل آن‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 + x^2 + 4x + 4$$

۲) جمله کسری نداریم.

۳) معلوم‌ها را به طرف راست و مجهول‌ها را به طرف چپ می‌بریم:

$$x^2 - 2x - x^2 - 4x = 4 + 4 - 1$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$-6x = 7$$

۵) طرفین معادله را بر -۶ تقسیم می‌کنیم تا جواب به دست آید:

$$x = -\frac{7}{6}$$

۱- جواب معادله $2x + 1 = \frac{x-4}{5} - \frac{2-3x}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{37}{45}$ (۲) $\frac{7}{45}$ (۳) $\frac{37}{48}$ (۴) $\frac{7}{48}$

۲- اگر $a \neq 2b$ ، جواب معادله $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) a (۳) b (۴) ۱

۳- به ازای کدام مقدار m، معادله $m(x-2) = 5x-1$ به یک تساوی نادرست (غیرممکن) تبدیل می شود؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{5}$

۴- اگر $(mx+2)^2 = (3m-x)^2$ یک معادله درجه اول باشد، آن گاه جواب آن کدام است؟ ($m > 0$)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۵- اگر معادله $(ax+2)^2 = (3x-1)^2$ یک معادله درجه اول باشد که جواب آن $x = \frac{1}{4}$ است، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) -۳

۶- مجموع ثلث و خمس عددی ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن عدد است. نصف نصف این عدد کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۳۰

۷- اگر به سه برابر عددی، ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۵ می شود. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۴ (۳) ۸ (۴) ۶

۸- علی، رضا و مهدی با هم در پولی شریک هستند. اگر سهم علی و رضا به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ از پول باشد و مهدی ۱۰۰ هزار تومان پول گذاشته باشد، پول علی چند هزار تومان بوده است؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۲۵

۹- عددی ۲ برابر عدد دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگر است. میانگین این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۰- محیط یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $(1 + \sqrt{2})$ سانتی متر است. مساحت آن کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{12}$ (۳) ۹ (۴) $9\sqrt{2}$

۱۱- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی ۶۵۷ است. رقم دهگان عدد کوچک تر کدام است؟


- (۱) ۹ (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۲

۱۲- حاصل جمع چهار عدد طبیعی زوج متوالی ۳۶ شده است. حاصل ضرب دو عدد وسطی کدام است؟


- (۱) ۸۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲۰

۱۳- ۵ سال دیگر مجموع سن رضا و مجید، برابر ۳۰ خواهد شد. اگر سال گذشته سن رضا دو برابر سن مجید بوده باشد، اختلاف سن آنها کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۴- امسال پدری در ۳۰ سالگی فرزندش ۵۶ سال دارد. چند سال قبل، سن پدر، سه برابر سن پسرش بوده است؟ 

- (۱) ۱۳ (۲) ۲۶ (۳) ۱۷ (۴) ۳۹

۱۵- مینا تعدادی شکلات داشت. نیمی را به برادرش و نیمه بقیه اش را به دوستش و نیمه باقی مانده را به مادرش داد و ۵ شکلات برای خودش باقی ماند. او در ابتدا چند شکلات داشته است؟ 

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۶- در یک شرکت ۳ مدیر، ۲ معاون، ۱۵۰ کارمند و ۵ خدمات چی وجود دارد. اگر حقوق یک کارمند ۲ برابر یک خدمات چی، نصف یک معاون و $\frac{1}{5}$ یک مدیر باشد و این شرکت ماهیانه ۳۴۳۰۰۰۰۰ تومان حقوق پرداخت کند، یک معاون، ماهی چند میلیون تومان حقوق می گیرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

معادله درجه دوم و مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)



فرض کنید می‌خواهیم طول وتر مثلث قائم‌الزاویه زیر را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورت داریم:

$$x^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{تک‌جواب از } x} x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

اگر $x = 0$ باشد، طول یکی از اضلاع، صفر و یکی دیگر از اضلاع، منفی می‌شود که قابل قبول نیست، پس فقط $x = 4$ قابل قبول است و طول اضلاع ۳ و ۴ و طول وتر ۵ می‌شود.

معادله‌ای که برای حل این مسأله نوشتیم، درجه اول نبود، به این معادله، درجه دوم گفته می‌شود (چون بیشترین توان متغیر ۲ است). در حالت کلی داریم:

معادله درجه دوم: هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $a \neq 0$ است، یک معادله درجه دوم می‌نامند. در این معادله، a ، ضریب x^2 ، b ، ضریب x و c عدد ثابت است و به این شکل از معادله، صورت استاندارد آن گفته می‌شود.

نویسه معادله درجه دوم را هم با اعمال جبری ساده حل می‌کنیم.

نکته هانم بهازما همیشه تو این معادله هم بگید اگر a صفر باشه یا حتی b و c ، چه حالت‌هایی پیش میاد؟

پاسخ: بله که میشه، ولی پهن تو این معادله، حالت‌ها خیلی زیاده و مهمه، بگذار یک کم همین حالت معمولی معادله رو تمرین کنیم، بعد تو درسامه‌های بعدی مفصل برات توضیح می‌دم.

مسئله یازدهم پاسخ

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم است، بزرگ‌ترین توان x باید ۲ باشد. جواب معادله هم در خود معادله صدق می‌کند و یا هر عددی که در معادله صدق کند، جواب معادله است.

مثال اگر معادله $mx^2 - (n-1)x^2 - 2x + 1 = x^2 + 3m + x$ یک معادله درجه دوم با جواب $x = 1$ باشد، مقدار m و n را پیدا کنید و عدد ثابت را بیابید.

پاسخ: اولاً چون معادله درجه دوم است، باید بزرگ‌ترین توان متغیر ۲ باشد. بنابراین ضریب x^2 باید صفر شود تا یک معادله درجه دوم داشته باشیم:

$$n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم و به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$mx^2 - 2x + 1 = x^2 + 3m + x \Rightarrow mx^2 - x^2 - 2x - x + 1 - 3m = 0 \Rightarrow (m-1)x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \quad (*)$$

البته برای پیدا کردن مقدار m نیازی به استاندارد کردن نبود ولی برای پیدا کردن جمله ثابت در مرحله بعد به آن احتیاج داشتیم که می‌توانستیم بعداً این کار را انجام دهیم.

چون $x = 1$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$(m-1)(1)^2 - 3(1) + 1 - 3m = 0 \Rightarrow m - 1 - 3 + 1 - 3m = 0 \Rightarrow -2m - 3 = 0 \Rightarrow -2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

عدد ثابت معادله، طبق رابطه $(*)$ برابر $1 - 3m$ است. در نتیجه:

$$\text{عدد ثابت} = 1 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

رمزنگاری: می‌توانیم حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده و از آن برای رمزگذاری کلمات فارسی استفاده کنیم. قانون رمزگذاری را این‌طور قرارداد می‌کنیم که:

۱) هر حرف بدون نقطه با شماره آن از ۱ تا ۳۲ مشخص شود.

۲) حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شوند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف موردنظر باشد. مثلاً حرف «ط» با عدد ۱۹ (چون ۱۹ آمین حرف الفبا است) و حرف «ث» با $5x^3$ (چون ۵ آمین حرف الفبا است و تعداد نقطه‌هایش ۳ است) مشخص می‌شوند.

۳) برای نوشتن کلمات از علامت جمع بین رمزهای هر حرف استفاده می‌کنیم. مثلاً معادل رمزی کلمه «ریاضی» به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{array}{cccccc} \text{ی} & + & \text{ض} & + & \text{ا} & + & \text{ر} & + & \text{ی} & + & \text{ر} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 32 & & 18x & & 1 & & 32x^2 & & 12 & & \Rightarrow 12 + 32x^2 + 1 + 18x + 32 \end{array}$$

هریشه پندم بنفشه

برای رمزنگاری، حواسمان به حروف نقطه‌دار باشد و حتماً آن‌ها را به صورت ax^2 بنویسیم. وقتی حرفی مثل «ی» وسط کلمه می‌آید، ۲ تا نقطه دارد و در آخر کلمه، بدون نقطه است، پس باید آن را در وسط به صورت $32x^2$ و در آخر به صورت 32 بنویسیم.

مثالی الگوی ریاضی معادل کلمه «دانش آموز» را بنویسید.

$$\begin{matrix} \text{د} & + & \text{ا} & + & \text{ن} & + & \text{ش} & + & \text{ا} & + & \text{م} & + & \text{و} & + & \text{ز} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 10 & & 1 & & 29x & & 16x^2 & & 1 & & 28 & & 30 & & 13x \end{matrix} \Rightarrow 10 + 1 + 29x + 16x^2 + 1 + 28 + 30 + 13x$$

پاسخ:

۱۷- با کدام شرط، معادله $(a-3)x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ همواره یک معادله درجه دوم است؟

- (۱) $a = 3$ (۲) $a \neq 3$ (۳) $b = 2$ (۴) $b \neq 2$

۱۸- کدام معادله درجه دوم است؟

- (۱) $(x-1)^2 = x^2 - 5x + 6$ (۲) $(2x-1)^2 = (3+2x)^2$
 (۳) $2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1$ (۴) $(3x-1)^2 = (x+1)^2$

۱۹- اگر در شکل استاندارد معادله $(x-2)(2x+1) = 3x+6$ ، ضریب جمله درجه دوم برابر ۱ باشد، ضریب جمله درجه اول کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۳

۲۰- ضریب جمله درجه ۲ در معادله $(3x+1)^2 = (x-4)^2$ ، در صورتی که عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) -۸ (۴) -۳۲

۲۱- اگر $ax^3 + bx^2 + cx - dx^2 + d = 0$ یک معادله درجه دوم باشد که ضریب جمله درجه دوم آن برابر ۳، ضریب جمله درجه اول آن

آزمونهای سراسری گاج

برابر ۲- و جمله ثابت آن برابر -۱ است، مقدار $a-b-c+d$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۲- اگر $x = 2$ جواب معادله درجه دوم $(m-2n)x^3 + nx^2 + 2mx - 12 = 0$ باشد، حاصل $m^2 + n^2$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۲۳- اگر α جواب معادله $3x^2 - 5x + \alpha = 0$ باشد، مقدار عبارت $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

۲۴- اگر a جواب معادله درجه دوم $3x^2 - 8x - 4 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۲۵- معادل ریاضی کلمه «شیرین» کدام است؟

- (۱) $16x^3 + 32 + 12 + 32 + 29x$ (۲) $16x^3 + 7x + 29x$
 (۳) $16x^3 + 64x^2 + 29x + 12$ (۴) $16x^3 + 32x^2 + 12 + 32x^2 + 29x$

۲۶- معادل ریاضی کلمه «درخت سبز» شامل چند عدد زوج است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۲۷- کلمه معادل رمز « $2x + 29x + 23x + 16x^3$ » کدام است؟

- (۱) پوزش (۲) بتفش (۳) مثلث (۴) بلوچ

۲۸- معادل فارسی رمز « $32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$ » کدام است؟

- (۱) ناسوز (۲) یکتا (۳) یکرو (۴) یکسان

۲۹- در نوشتن معادل ریاضی کلمه «روزهای شنبه» مجموع ضرایب جملات درجه اول کدام است؟

- (۱) ۱۳۷ (۲) ۸۲ (۳) ۴۴ (۴) ۳۶

۳۰- حروف رمز یک کلمه به صورت درهم ریخته، ۳۰، ۰۲۶، ۰۱۳x، ۱۲ و ۱۱۲ است. این کلمه کدام است؟

- (۱) سوزدار (۲) رازدار (۳) روزگار (۴) داجمان

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

در فصل اول با اتحادها و تجزیه عبارتهای جبری آشنا شدید. حال از تمام آن مطالب برای حل معادله‌های درجه دوم می‌توانید استفاده کنید. در واقع یکی از روش‌های حل معادله‌های درجه دوم، روش تجزیه است و چون معادله‌ها درجه ۲ هستند، فقط اتحادهای «مربع دوجمله‌ای»، «مزدوج» و «جمله مشترک» به کار ما می‌آیند. از روش‌های دیگر تجزیه مثل «فاکتورگیری» هم می‌توانیم استفاده کنیم. با استفاده از همان قانون‌هایی که برای پیدا کردن اتحادها در فصل قبل گفتیم، اتحاد لازم برای تجزیه را پیدا می‌کنیم، بعد به حل معادله می‌پردازیم.

نکته یادآوری: اگر $a \times b = 0$ ، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای	$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \Rightarrow (x+a)^2 = 0 \Rightarrow (x+a)(x+a) = 0$ $\Rightarrow x = -a$ یا $x = -a$	دو ریشه برابر یا ریشه مضاعف
اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای	$x^2 - 2bx + b^2 = 0 \Rightarrow (x-b)^2 = 0 \Rightarrow (x-b)(x-b) = 0$ $\Rightarrow x = b$ یا $x = b$	دو ریشه برابر یا ریشه مضاعف
اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری	$x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow (x-a)(x+a) = 0 \Rightarrow x = a$ یا $x = -a$ یا $x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$; $(a \in \mathbb{R})$	دو ریشه قرینه هم
اتحاد جمله مشترک	$x^2 + (a+b)x + ab = 0 \Rightarrow (x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x = -a$ یا $x = -b$	دو ریشه متمایز
فاکتورگیری	$x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -a$	یک ریشه صفر و یک ریشه غیرصفر

میشه یادداشت

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- وقتی ۳ تا جمله داریم که ۲ تا از آن‌ها مربع کامل است (و سومی هم دو برابر جذر آن دو تا)، برای حل معادله از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم. جواب این معادله ریشه مضاعف محسوب می‌شود.
- اگر $b = 0$ باشد و دو تا جمله مربع کامل داشته باشیم که بین آن‌ها علامت منفی است (حتماً یکی منفی و یکی مثبت)، در واقع اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. جواب این معادله، دو ریشه قرینه هم‌دیر است.
- در این حالت، یعنی $b = 0$ ، اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله جواب ندارد.
- اگر $c = 0$ باشد، از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. جواب این معادله صفر و یک عدد دیگر است.
- اگر ۳ تا جمله داشتیم که در شرط‌های اتحاد جمله مشترک صدق می‌کردند، از این اتحاد استفاده می‌کنیم. در این حالت جواب معادله دو عدد متمایز است.

نکته مهم یادآوری: اومدیم به معادله‌ای هیچ کدام از شرط‌های بالا رو نداشت. اون وقت چی کار کنیم؟ چه طوری حل میشه؟ یعنی دیگه حل نمیشه و جواب نداره؟

پاسخ: سؤال خوبی پرسیدی! بعد بود از تو اون وقت می‌ریم سراغ بقیه روش‌های حل معادله درجه دوم که در درسنامه‌های بعدی کم‌کم باهاشون آشنا می‌شی. فعلاً همین‌ها رو این‌ها خوب یاد بگیر تا بعداً بهت بگم چی کار کنی.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \quad \text{ب) } 9x^2 - (1-x)^2 = 0 \quad \text{ج) } x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{د) } 6x^2 = x$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

پاسخ: الف) ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

سه جمله داریم که ۲ تا از آن‌ها مربع کامل $(x^2$ و $\frac{1}{9})$ و جمله دیگر، دو برابر جذر آن دو تا $(2 \times \frac{1}{3} \times x)$ است. پس اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای است:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$$

ب) روش اول: دو جمله مربع کامل $9x^2$ و $(1-x)^2$ را با علامت منفی بین آن‌ها داریم. پس می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$9x^2 - (1-x)^2 = 0 \Rightarrow (3x - (1-x))(3x + (1-x)) = 0 \Rightarrow (3x - 1 + x)(3x + 1 - x) = 0 \Rightarrow (4x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ \text{یا} \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم: از ریشه‌گیری هم می‌توانستیم جواب را به‌دست آوریم. ببینید:

$$9x^2 = (1-x)^2 \Rightarrow 3x = \pm(1-x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 1-x \Rightarrow 3x+x=1 \Rightarrow 4x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ 3x = -(1-x) \Rightarrow 3x-x=-1 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

نکته مهم: چرا اشتباه درس می‌دین؟ شما که گفتین اگه با اتحاد مزدوج جواب رو به‌دست بیاریم، دو تا جواب، قرینه هم هستند. پس چرا این‌جا نشدند؟ جوابتون رو غلط به‌دست آوردید؟

پاسخ: قبلی هم درست به‌دست آوردیم. بلکه گفتیم. اما اگه قوب به درس توجه کرده بودی، اون‌جا وقتی معادله به شکل $x^2 - a^2 = 0$ و $a \in \mathbb{R}$ هست، گفتیم جواب‌ها رو عدد قرینه هم میشه. در این مثال، جمله دوم، عدد نیست، یک عبارت که خودش شامل متغیر هست، پس شبیه چیزی که ما گفتیم، نیست. در واقع اگه این معادله رو اول ساده می‌کردی، بعد جوابش رو پیدا می‌کردی، می‌فهمیدی چرا این‌طوری شه:

$$9x^2 - (1-2x+x^2) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 + 2x - x^2 = 0 \Rightarrow 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

همون‌طوری که می‌بینی به معادله ای رسیدیم که با هیچ‌کدوم از اتحادها نمی‌تونیم اون‌رو تجزیه کنیم، البته شبیه اتحاد جمله مشترک است. روش سوم رو ببین:

نکته: برای تجزیه و حل معادلات درجه ۲ از روش A (که برای اتحادهای شبیه جمله مشترک، استفاده می‌کردیم) هم می‌توانیم استفاده کنیم. مشابه آن‌چه که در اتحادها گفتیم، با این روش، معادله را تجزیه کرده و جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم.

روش سوم: از روش A، معادله را تجزیه کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$A = 8x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8A = 64x^2 + 16x - 8 \Rightarrow 8A = (8x-2)(8x+4) \Rightarrow 8A = 2(4x-1)4(2x+1)$$

$$\xrightarrow{\div 8} A = (4x-1)(2x+1) \Rightarrow \text{معادله } (4x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ \text{یا} \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

زیری قدر سفت شه! پس روش اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری در واقع به راه میانبر و قوب برای حل این معادله بود. تازه در درسامه‌های بعدی با روش‌های دیگر هم طش رو فواهی زید.

ج خیلی راحت با اتحاد جمله مشترک می‌توان معادله را تجزیه کرد و جواب‌ها را به‌دست آورد:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=1$$

$$6x^2 - x = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} x(6x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ 6x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{6} \end{cases} \quad (د)$$

نکته: گاهی بعضی معادلات درجه دوم به‌صورت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ نیستند، اما با یک تغییر ساده به این شکل، تبدیل می‌شوند. مثلاً

معادله $(x+m)^2 + 3(x+m) + 2 = 0$ را ببینید، می‌توانید حاصل پرانتز $(x+m)^2$ را به‌دست آورید و معادله را ساده کنید و بعد جواب‌ها را به‌دست آورید. ولی به‌جای این کار طولانی، اگر $x+m$ را برابر t فرض کنید، آن‌گاه معادله به‌صورت $t^2 + 3t + 2 = 0$ درمی‌آید که همان شکل کلی معادله درجه دوم است و به‌راحتی با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه‌شده و حل می‌شود. در نهایت باید جواب t را مساوی $x+m$ قرار دهید و x را پیدا کنید.

به این عمل **تغییر متغیر** می‌گویند که در معادله‌هایی به این صورت، بسیار کاربردی و مفید است.

مثال: جواب‌های معادله $(t-1)^2 - 4(t-1) + 3 = 0$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با فرض $x = (t-1)$ معادله به‌صورت $x^2 - 4x + 3 = 0$ درمی‌آید که با اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \xrightarrow{x=(t-1)} (t-1)^2 = 3 \Rightarrow t-1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} t=3+1=4 \\ t=-3+1=-2 \end{cases} \\ \text{یا} \\ x=1 \xrightarrow{x=(t-1)} (t-1)^2 = 1 \Rightarrow t-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} t=1+1=2 \\ t=-1+1=0 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله داده‌شده دارای ۴ جواب است. اگرچه در ابتدا یک معادله درجه ۴ و غیرقابل حل به‌نظر می‌آمد، ولی با یک تغییر متغیر ساده و تبدیل آن

به معادله درجه دوم توانستیم به‌راحتی جواب‌ها را پیدا کنیم.

۳۱- معادله $(1-x+x^2)(x+1)=x(x^2-1)+x$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

نشانی داخل ۸۶

۳۲- جواب معادله $x^2+6x+4=-3x^2+6x+5$ کدام است؟

- (۱) $\{\frac{1}{2}, -1\}$ (۲) $\{-\frac{1}{2}, 1\}$ (۳) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ (۴) $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

آزمونهای سراسری گاج

۳۳- معادله $x^2-5x+3=-(x+5)x$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک جواب منفی (۳) ۲ (۴) یک جواب مثبت

۳۴- مربع عددی از ده برابر آن عدد، ۲۵ واحد کم تر است، آن عدد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۵

۳۵- یکی از ریشه های معادله درجه دوم $(2x-3)^2=7$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}+3}{3}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{7}-3}{2}$ (۴) $\frac{-\sqrt{7}-3}{2}$

۳۶- حاصل ضرب جواب های معادله $(2x+5)^2=(x-1)^2$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) $-\frac{16}{3}$

۳۷- در معادله $(x-\alpha)^2=\beta^2$ مجموع مربعات جواب ها کدام است؟

- (۱) $\alpha^2+\beta^2$ (۲) $\alpha^2-\beta^2$ (۳) $2(\alpha^2+\beta^2)$ (۴) $2(\alpha^2-\beta^2)$

۳۸- حاصل ضرب ریشه های معادله $(x+1)(x-5)+12(x+1)=0$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) ۸

آزمونهای سراسری گاج

۳۹- مربع یک عدد طبیعی فرد، مساوی ۱۰ برابر آن عدد منهای ۹ است، این عدد کدام است؟

- (۱) $\{7, 11\}$ (۲) $\{9, 11\}$ (۳) $\{1, 7\}$ (۴) $\{1, 9\}$

آزمونهای سراسری گاج

۴۰- اگر $x=-2$ یکی از جواب های معادله $a^2x^2-2ax+a=0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۶, ۲ (۲) -۶, -۲ (۳) ۶, ۲ (۴) ۶, -۲

۴۱- معادله درجه دوم $ax^2-4x+c=0$ با چه شرطی دارای ریشه مضاعف $x=-1$ است؟

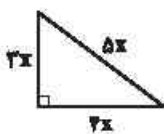
- (۱) $a=c=-2$ (۲) $a=-c=2$ (۳) $a=-c=-2$ (۴) $a=c=2$

۴۲- اگر x عددی طبیعی باشد، به طوری که حاصل ضرب عدد صحیح قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن برابر ۸۰ گردد، جذر x کدام است؟

آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳- عدد مربوط به محیط و مساحت شکل مقابل با هم برابر است. طول وتر مثلث کدام است؟ ($x > 0$)



آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۴۴- اگر معادله درجه دوم $a^2x^2+(a-5)=0$ جواب نداشته باشد، a کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۶ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) -۵

۴۵- اگر معادله درجه دوم $ax^2+bx-c=0$ دارای یک جواب صفر و یک جواب بزرگ تر از ۳- باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟ ($a > 0$)

- (۱) $b+2a=0$ (۲) $b < 2a$ (۳) $b-2a=0$ (۴) $b > 2a$

۴۶- اگر جواب بزرگ تر معادله $(t-3)^2+(t-3)-6=0$ برابر A و جواب کوچک تر آن برابر B باشد، آن گاه $2A+B$ برابر کدام است؟

آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) -۱۱ (۴) ۱

۴۷- اگر $A=2x-1$ ، آن گاه جواب های معادله $A^2+2A-24=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\pm \frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\pm \frac{3}{2}$

۴۸- مربع جواب بزرگ تر معادله $x^2-13x^2+22x=0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸۱ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲۱

۴۹- در مورد جواب‌های معادله $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ کدام درست است؟

- (۱) جواب مثبت دارد. (۲) جواب منفی و ۱ جواب مثبت دارد.
(۳) جواب مثبت و ۱ جواب منفی دارد. (۴) جواب منفی دارد.

۵۰- تعداد جواب‌های معادله $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

نسبی خارج ۹۲

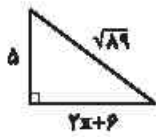
۵۱- تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵۲- اگر بزرگ‌ترین جواب معادله $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ برابر A و کوچک‌ترین جواب آن برابر B باشد، آن‌گاه $A - B$ برابر کدام است؟

آزمون‌های سرسری گاج

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱



آزمون‌های سرسری گاج

۵۳- مساحت مثلث قائم‌الزاویه مقابل، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۲۵

۵۴- چهار برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۵۵- عددی مثبت با ۳ جمع، بعد این مجموع، نصف و حاصل آن به توان ۲ رسید و جوابش ۴ شد. آن عدد باید چند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۷

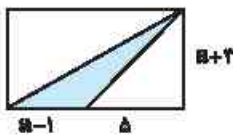
۵۶- مساحت دایره‌ای از دو برابر محیط آن 12π واحد بیشتر است. اختلاف مساحت و محیط این دایره کدام است؟

- (۱) 16π (۲) 24π (۳) 12π (۴) 14π

۵۷- عددی ۴ برابر عدد دیگر و حاصل ضرب آن دو نیز ۴ برابر مجموعشان می‌باشد. تفاضل آن‌ها کدام است؟

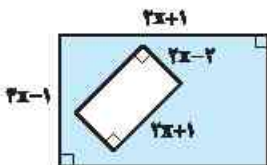
- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۵۸- اگر مساحت مستطیل مقابل، ۵۶ واحد باشد، مساحت مثلث رنگی کدام است؟



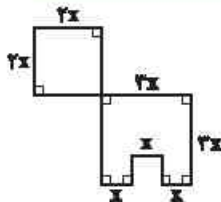
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) $11/5$ (۴) $10/5$

۵۹- اگر مساحت قسمت رنگی شکل مقابل، ۴۹ باشد، مقدار x کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۵

۶۰- اگر محیط و مساحت شکل مقابل با هم برابر باشد، مقدار x کدام است؟

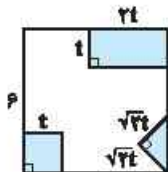


- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) $11/2$ (۴) $11/6$

۶۱- از مربعی به ضلع ۶ cm سه قسمت رنگی زیر، بریده شده و مساحت باقی‌مانده 24cm^2 است.

تمرین کتاب درسی

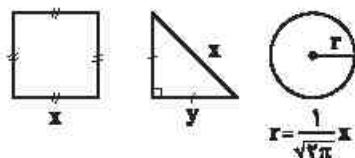
t کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) ۱

تمرین کتاب درسی

۶۲- اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، محیط مربع کدام است؟



- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱۰

پاسخ‌های تشریحی

ابتدا طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرهای، یعنی ۱۵ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$\begin{aligned} 5(2-3x) - 2(x-4) &= 15(2x+1) \Rightarrow 10 - 15x - 2x + 8 = 30x + 15 \\ \Rightarrow 30x + 15x + 2x &= 10 + 8 - 15 \Rightarrow 48x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

ابتدا معادله داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$a(x-1) - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow ax - a - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow (a-2b)x - a + 2b = 0$$

حالا یک معادله درجه اول داریم و چون طبق فرض $a \neq 2b$ است، پس ضریب x مخالف صفر می‌باشد و معادله جواب دارد:

$$(a-2b)x = a - 2b \xrightarrow{+(a-2b)} x = \frac{a-2b}{a-2b} \Rightarrow x = 1$$

$$m(x-2) = 5x - 1 \Rightarrow mx - 2m = 5x - 1 \Rightarrow mx - 5x = -1 + 2m \Rightarrow (m-5)x = 2m - 1$$

برای این‌که به یک تساوی نادرست برسیم، باید معادله فوق را به شکل $0 \times x = A \neq 0$ تبدیل کنیم، در نتیجه اگر $m - 5 = 0$ و بنابراین

$m = 5$ باشد، داریم:

$$0 \times x = 2(5) - 1 \Rightarrow 0 \times x = 9 \text{ غیرممکن}$$

بمازای سایر مقادیر m ، معادله درجه اول حاصل، یک جواب خواهد داشت.

معادله را ساده می‌کنیم:

$$m^2 x^2 + 4mx + 4 = 9m^2 - 6mx + x^2 \Rightarrow m^2 x^2 + 4mx + 4 - 9m^2 + 6mx - x^2 = 0 \Rightarrow (m^2 - 1)x^2 + 10mx - 9m^2 = 0$$

چون معادله درجه اول است، پس باید ضریب x^2 صفر باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \xrightarrow{m > 0} m = 1$$

$$(3x-1)^2 = (ax+2)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = a^2 x^2 + 4ax + 4 \Rightarrow 9x^2 - 6x - a^2 x^2 - 4ax = 4 - 1 \Rightarrow (9-a^2)x^2 - (6+4a)x = 3$$

اولاً چون معادله درجه اول است، ضریب x^2 در آن صفر می‌باشد

$$9 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

ثانیاً چون $x = \frac{1}{3}$ جواب معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$-(6+4a)x = 3 \xrightarrow{x = \frac{1}{3}} (-6-4a)\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \Rightarrow -2-2a = 3 \Rightarrow -2a = 3+2 \Rightarrow -2a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم، داریم:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{4} + 34 \xrightarrow{\times 60} 20x + 12x - 15x = 2040 \Rightarrow 17x = 2040 \Rightarrow x = \frac{2040}{17} = 120$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم، ابتدا معادله ریاضی تک‌تک جملات را نوشته، سپس معادله آن را برای محاسبه x می‌نویسیم:

$$5 = \frac{3x+4}{2} - x \xrightarrow{\text{باقی‌مانده}} \frac{3x+4}{2} - x \xrightarrow{\text{همان عدد}} \frac{3x+4}{2} - x \xrightarrow{\text{تصف حاصل}} \frac{3x+4}{2} - x = 5$$

همان‌طور که دیدید وقتی مرحله به مرحله پیش می‌رویم، سرانجام خیلی راحت به معادله موردنظر می‌رسیم. حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{3x+4}{2} - x = 5 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} 3x+4-2x = 10 \Rightarrow 3x-2x = 10-4 \Rightarrow x = 6$$

اگر کل پول را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 100 = x \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x - x = -100 \Rightarrow \frac{5x+6x-15x}{15} = -100 \Rightarrow -\frac{4}{15}x = -100$$

$$\Rightarrow x = \frac{15 \times 100}{4} = 15 \times 25 = 375 \text{ هزار تومان}$$

پس پول علی برابر است با:

$$\frac{1}{3} \times 375 = 125 \text{ هزار تومان}$$

اعداد مورد نظر را x و y فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow (2y)^2 = y^2 \Rightarrow 4y^2 = y^2 \xrightarrow{+y^2} 4 = y \Rightarrow x = 2y = 2(4) = 8$$

$$\Rightarrow \text{میانگین دو عدد} = \frac{x+y}{2} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{محدید} &= x + x + y \Rightarrow 6(1 + \sqrt{2}) = 2x + y \\ \text{قضایاوری} &: x^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow 2x^2 = y^2 \xrightarrow{x=y} y = \sqrt{2}x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x + \sqrt{2}x = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{36}{2} = \frac{36}{4} = 9$$

می‌توانیم اعداد زوج را به صورت $2x$ و اعداد فرد را به صورت $2x-1$ نشان دهیم. وقتی سه عدد زوج متوالی داریم، سه عدد را به صورت

$$2x-3, 2x-1, 2x+1 \text{ یا } 2x, 2x+2, 2x+4 \text{ یا } 2x-2, 2x, 2x+2$$

$$2x-1, 2x+1, 2x+3 \text{ یا } 2x-1, 2x+1, 2x+3$$

$$2x-3 + 2x-1 + 2x+1 = 657 \Rightarrow 6x-3 = 657 \Rightarrow 6x = 660 \Rightarrow x = \frac{660}{6} \Rightarrow x = 110$$

$$\Rightarrow \text{رقم دهگان عدد کوچک‌تر} \Rightarrow 217+219+221 \Rightarrow \text{اعداد} \Rightarrow 2(110)-3, 2(110)-1, 2(110)+1 \Rightarrow \text{اعداد فرد متوالی}$$

اعداد طبیعی زوج متوالی را $2x-2, 2x, 2x+2, 2x+4$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$2x-2 + 2x + 2x+2 + 2x+4 = 36 \Rightarrow 8x = 36-4 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{8} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \text{اعداد زوج متوالی} \Rightarrow \xrightarrow{\text{حاصل‌سرب دو عدد متوالی}} 6, 8, 10, 12 \Rightarrow 8 \times 10 = 80$$

لبه ششم اجازت ما چهار تا عدد رو به شکل $2x, 2x+2, 2x+4, 2x+6$ گرفتیم. جوابمون هم درست در اومد!

پاسخ: قب کار اشتباهی نکردی که به جواب غلط برسی. اینم درست. حتی اگه چهار عدد رو به صورت $2x-4, 2x-2, 2x, 2x+2$ و یا کلی فرض دیکه

(و البته درست) هم در نظر بگیری، باز به جواب درست می‌رسی! ولی همیشه بهتره این‌ها رو طوری بگیری که تناسبات کم‌تر بشه. مثلاً اون طوری که ما

گرفتیم. همون اول در سمت چپ 2 و 2- با هم فرق شدن و تناسبات کم‌تری داشتیم ولی تو باید 2 و 4 و 6 رو با هم جمع می‌کردی.

اگر سن رضا را x و سن مجید را y فرض کنیم، با توجه به توضیحات سؤال می‌توانیم معادله‌های زیر را بنویسیم:

۵ سال ۵ سال
بعد مجید بعد رضا

$$(5+x) + (5+y) = 30 \Rightarrow 10+x+y = 30 \Rightarrow x+y = 20 \quad (*)$$

$$(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow x-1 = 2y-2 \Rightarrow x-2y = -1 \quad (**)$$

۱ سال ۱ سال
گذشته مجید گذشته رضا

اگر معادله $(**)$ را از معادله $(*)$ کم کنیم، داریم:

$$x+y - (x-2y) = 20 - (-1) \Rightarrow x+y-x+2y = 20+1 \Rightarrow 3y = 21 \Rightarrow y = 7$$

$$\xrightarrow{x+y=20} x+7=20 \Rightarrow x=13 \Rightarrow x-y = 13-7 = 6$$

اختلاف سن پدر و پسر ۲۶ سال $(26 = 56 - 30)$ است، یعنی وقتی پسر به دنیا آمده، پدر ۲۶ سال داشته است. اگر فرض کنیم x سال بعد از

تولد پسر، سن پدر، سه برابر سن پسر شود، آن‌گاه می‌توانیم معادله آن را به صورت $26+x = 3x$ بنویسیم و با حل آن داریم:

$$26 = 3x - x \Rightarrow 26 = 2x \Rightarrow x = 13$$

یعنی ۱۳ سال بعد از تولد پسر (وقتی پسر ۱۳ سال دارد)، پدر $26+13 = 39$ سال داشته که ۳ برابر سن پسرش بوده است. اما در سؤال از ما

خواسته که پیدا کنیم چند سال قبل از امسال این اتفاق افتاده است، در نتیجه داریم:

$$\text{سال قبل} = 56 - 39 = 17$$

فرض کنیم تعداد شکلات‌های مینا در ابتدا X تا بوده است. مرحله به مرحله پیش می‌رویم و تعداد شکلات‌های برادر، دوست و مادر مینا را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{X}{2} \Rightarrow \underbrace{X - \frac{X}{2}}_{\text{باقی مینا}} = \frac{X}{2} \Rightarrow \frac{X}{2} = \frac{X}{2} \Rightarrow \underbrace{X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}}_{\text{باقی مادر}} = \frac{X}{4} \Rightarrow \frac{X}{2} = \frac{X}{8}$$

نکته مهم: همیشه بگید چی شد؟ خیلی پیچیده شد!!

پاسخ: بین اولش که نصف شکلات‌ها رو به برادرش می‌ده، یعنی $\frac{X}{2}$ رو، بعد گفته نیمه بقیه‌اش رو به دوستش می‌ده، یعنی از $X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2}$ که باقی مونده، نصف‌اش رو که میشه $\frac{X}{4}$ به دوستش می‌ده. دوباره از نصف باقی‌مانده به مادرش می‌ده. چون از X تا شکلات، رو به برادرش $\frac{X}{2}$ و رو به دوستش داده بود، پس $X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4} = \frac{X}{4}$ شکلات باقی می‌مونه که نصف اون به مادرش می‌رسه، یعنی $\frac{X}{8}$. در نهایت گفته ۵ تا برای خودش باقی می‌مونه، یعنی آکه سهم همه رو از X تا کم کنی ۵ تا می‌مونه. به ارامه حل دقت کن:

$$X - \left(\frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{8}\right) = 5 \Rightarrow X - \left(\frac{4X + 2X + X}{8}\right) = 5 \Rightarrow X - \frac{7X}{8} = 5 \Rightarrow \frac{X}{8} = 5 \Rightarrow X = 40$$

اگر حقوق یک کارمند را X در نظر بگیریم و حقوق خدمات‌چی، معاون و مدیر را به ترتیب Y ، Z و $2Z$ فرض کنیم، داریم:

$$X = 2Y \Rightarrow Y = \frac{X}{2}, \quad X = \frac{1}{2}Z \Rightarrow Z = 2X, \quad X = \frac{1}{5}Z \Rightarrow Z = 5X$$

حال با توجه به تعداد افراد در هر پست، مجموع حقوق‌ها را بر حسب X به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3Z + 2Z + 150X + 5Y = 3(5X) + 2(2X) + 150X + 5\left(\frac{X}{2}\right) = 15X + 4X + 150X + \frac{5}{2}X = \left(\frac{30 + 8 + 300 + 5}{2}\right)X = \frac{343}{2}X$$

$$\Rightarrow \frac{343}{2}X = 242000000 \Rightarrow X = 2000000 \text{ تومان}$$

پس حقوق معاون برابر است با:

$$Z = 2X = 2(2000000) = 4000000 \text{ تومان}$$

باید ضرب X^2 مخالف صفر باشد:

$$a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$$

بررسی گزینه‌ها:

$$1) (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$2) (2x-1)^2 = (2+2x)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 9 + 12x + 4x^2 \Rightarrow 16x = -8 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$3) 2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 5x - 8 = x^2 + 1 \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$4) (3x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 8x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \text{معادله درجه دوم}$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$(x-2)(2x+1) = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 - 3x - 4 = 0$$

ضرب جمله درجه اول

$$(3x+1)^2 = (x-4)^2 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 8x^2 + 14x - 15 = 0$$

باید عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، پس ابتدا طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$32x^2 + 56x - 60 = 0$$

حال باید معادله را در یک منفی ضرب کنیم:

$$-32x^2 - 56x + 60 = 0 \Rightarrow \text{ضرب جمله درجه ۲} = -32$$

اولاً چون معادله درجه دوم است، باید ضرب X^2 ، صفر باشد:

$$a = 0$$

ثانیاً اگر معادله را به صورت استاندارد بنویسیم، داریم:

$$(b-d)x^2 + cx + d = 0 \Rightarrow \begin{cases} b-d=3 \xrightarrow{(*)} b+1=3 \Rightarrow b=2 \\ c=-2 \\ d=-1 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow a-b-c+d = 0-2+2-1 = -1$$

اولاً چون معادله درجه دوم است، ضریب x^3 باید صفر باشد:

$$m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n \quad (*)$$

ثانیاً چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$n(2)^m + 2m(2) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 4m - 12 = 0 \xrightarrow{(*)} 4n + 4(2n) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 8n - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 12n = 12 \Rightarrow n = 1 \xrightarrow{(*)} m = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

چون α جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3\alpha^2 - 5\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$$

حال چون مقدار $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ از ما خواسته شده، کافی است طرفین تساوی فوق را به‌اضافه ۳ کنیم:

$$3\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 3$$

a جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3a^2 - 8a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 8a = 4$$

اگر طرفین تساوی فوق را بر ۲۴ تقسیم کنیم، به عبارت خواسته‌شده در صورت سؤال می‌رسیم:

$$\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3} = \frac{1}{6}$$

در این کلمه داریم:

$$ش + ی + ر + ی + ن$$

پس معادل ریاضی آن برابر است با:

$$16x^2 + 22x^2 + 12 + 22x^2 + 29x$$

📌 مثال چهارم ما گزینه (۳) رو جواب زدیم، خب دوتا $32x^2$ داشتیم، با هم جمع کردیم دیگه، شد $64x^2$ ، بعد هم جملات رو به ترتیب از توان بزرگ به کوچک نوشتیم. چیش غلطه؟

پاسخ: همه پیش! اومدی پروفیسور بازی در پیاری، زدی همه بی رو شراب کردی! فودت کلمه مغارل عبارت گزینه (۳) رو بنویس، ببین پس میشه؟ اصلاً میشه؟ برای جمله $64x^2$ باید حرف ۶۴م که دو تا نقطه هم داشته باشه رو بنویسی، داریم همپن حرفی رو؟ بعرض هم هیچ وقت ترتیب جمله‌ها رو عوض نکن، چون عبارت فاضل، دیگه مال اون کلمه نیست. آگه به فرض، همپن مشکل عدری (مثل ۶۴) هم پیش نیار، به کلمه دیگه‌ای که به احتمال زیاد بی‌معنی سافته میشه!

$$د + ر + خ + ت + س + ب + ز$$

$$10 + 12 + 9x + 4x^2 + 15 + 2x + 13x$$

در این رمز ۴ عدد زوج «۱، ۲، ۴ و ۲» وجود دارد.

بدون پیدا کردن حروف هم می‌توان جواب را پیدا کرد. چون در رمز داده‌شده تمام جملات x دارند، پس عدد ثابت و در نتیجه حرف بدون نقطه در کلمه نداریم، تنها گزینه‌ای که تمام حروف آن نقطه‌دار است، کلمه «بنفش» می‌باشد.

$$32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۳ & ۲ & ۵ & ۱ & ۲ \end{matrix} \Rightarrow \text{یکسان}$$

جملات درجه اول، یعنی جملات شامل x ، در رمزنگاری جملاتی که یک نقطه دارند شامل x هستند. پس لازم نیست رمز همه حروف را بنویسیم فقط رمز حروف یک نقطه‌ای را پیدا کرده و بعد ضرایب (شماره آن حروف) آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. حروف «ز»، «ن» و «ب» در این کلمه یک نقطه‌ای هستند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} ر \rightarrow 13x \\ ن \rightarrow 29x \Rightarrow \text{مجموع ضرایب } x = 13 + 29 + 2 = 44 \\ ب \rightarrow 2x \end{cases}$$

معادل فارسی هر رمز را پیدا می‌کنیم و بعد با کنار هم قرار دادن حرف‌ها، کلمه مناسب را پیدا می‌کنیم:

$$و \rightarrow 30 \quad ، \quad ک \rightarrow 26 \quad ، \quad ۱ \rightarrow 1 \quad ، \quad ز \rightarrow 13x \quad ، \quad ۱۲ \rightarrow ۱۲ \quad ، \quad ۱۲ \rightarrow ۱۲$$

پس حروف «ر، ز، ا، گ، و» را داریم که با آن می‌توان کلمه «روزگار» را درست کرد.

$$(1 - x + x^2)(x + 1) = x(x^2 - 1) + x \Rightarrow x^3 + 1 = x^3 - x + x \Rightarrow 1 = 1$$

تعداد جای و لامر

به یک تساوی نادرست رسیدیم، پس این معادله، جواب ندارد.

$$x^2 + 6x + 4 + 3x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 5x + 3 = -x^2 - 5x \Rightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

۱ ۳۳

اگر عدد مطلوب را x فرض کنیم، داریم:

۴ ۳۴

$$x^2 = 10x - 25 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

۲ ۳۵

$$(2x - 3)^2 = 7 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} 2x - 3 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow 2x = \pm\sqrt{7} + 3 \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{7} + 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{7} + 3}{2} \\ \text{یا} \\ x = \frac{-\sqrt{7} + 3}{2} \end{cases}$$

۳ ۳۶

$$(2x + 5)^2 = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} \begin{cases} 2x + 5 = x - 1 \Rightarrow 2x - x = -1 - 5 \Rightarrow x = -6 \\ 2x + 5 = -(x - 1) \Rightarrow 2x + 5 = -x + 1 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جواب‌ها} = (-6) \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{24}{3} = 8$$

۳ ۳۷

$$(x - \alpha)^2 = \beta^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x - \alpha = \pm\beta \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = \beta \Rightarrow x = \alpha + \beta \\ x - \alpha = -\beta \Rightarrow x = \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات جواب‌ها} = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

البته اگر از فصل قبل به یاد داشته باشید، اتحاد فوق یکی از اتحادهایی بود که از اتحاد مربع دو جمله‌ای نتیجه می‌شد و جواب آن برابر $2\alpha^2 + 2\beta^2$ می‌شد و دیگر نیازی به توان‌رسانی هم نبود.

۳ ۳۸

$$(x + 1)(x - 5) + 12(x + 1) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتوراز}} (x + 1)(x - 5 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = (-1)(-7) = 7$$

۴ ۳۹

اگر عدد طبیعی فرد را x فرض کنیم، داریم:

$$x^2 = 10x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ یا } x = 1$$

۲ ۴۰

چون $x = -2$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$(a + 3)(-2)^2 - 2a(-2) + a^2 = 0 \Rightarrow 4a + 12 + 4a + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 + 8a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 6)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = -6 \text{ یا } a = -2$$

۱ ۴۱

روش اول: می‌دانیم اگر معادله به صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای باشد، دارای ریشه مضاعف است. پس معادله باید به شکل $(x + 1)^2 = 0$ و در نتیجه $x^2 + 2x + 1 = 0$ باشد. اما در صورت سؤال، ضریب x برابر -4 است پس طرفین این معادله را در -2 ضرب می‌کنیم تا ضریب x آن -4 شود:

$$-2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$a = -2, c = -2 \Rightarrow a = c = -2$$

حال با مقایسه این معادله با معادله $ax^2 - 4x + c = 0$ داریم:

روش دوم: می‌دانیم جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$x = -1 \Rightarrow a(-1)^2 - 4(-1) + c = 0 \Rightarrow a + 4 + c = 0 \Rightarrow a + c = -4$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینه (۱) در این شرط صدق می‌کند:

$$a = c = -2 \Rightarrow a + c = -2 - 2 = -4$$

۲ ۴۲

$$(x - 1)(x + 1) = 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$$

چون x عددی طبیعی است، پس $x = 9$ قابل قبول است و جذر x برابر ۳ می‌باشد.

لیست خانم اجازه! تو سؤال گفته: «حاصل ضرب عدد صحیح قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن»، چرا شما این اعداد رو تو معادله نوشتید $x - 1$ و $x + 1$ ؟ مگه مثل هم‌اند؟ قبل x ، عدد صحیح و بعد از x ، عدد طبیعی!

پاسخ: وای! الانه که دیکه راز بزنم! آفه این چه سوالیه می‌پرسی؟ مگه نگفته x عدد طبیعی؟ فب تو فرض کن x عدد ۵ باشه. حالا با دقت جواب من رو بده. عدد صحیح قبل ۵ و عدد طبیعی بعد از ۵ چه اعدادی هستن؟

لیست خانم اجازه! خوب معلومه دیکه، ۴ و ۱۶

پاسخ: فب! مگه $4 = 5 - 1$ و $16 = 5 + 1$ نیست؟ پس آگه اون عدد x باشه، عدد صحیح قبلش $x - 1$ و عدد طبیعی بعرضش $x + 1$ می‌شه. پس آه فب معلومه دیکه، چون مجموعه اعداد طبیعی و اعداد صحیح مثبت با هم برابرند، در واقع هر عدد طبیعی یک عدد صحیح هم هست. امیدوارم پای دیکه‌ای از این سؤال‌ها نپرسی! چون عواقب پاسخ طرف مقابلت با فودته ☹️

$$\begin{cases} \text{محیط} = 3x + 4x + 5x = 12x \\ \text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 3x \times 4x = 6x^2 \end{cases} \Rightarrow 12x = 6x^2 \xrightarrow{\div 6} 2x = x^2 \xrightarrow{\div (x \neq 0)} x = 2$$

وتر $\rightarrow 6, 8, 10$: اضلاع مثلث \Rightarrow

$$a^2x^2 + (a - \Delta) = 0 \Rightarrow a^2x^2 = -(a - \Delta) \Rightarrow a^2x^2 = -a + \Delta \Rightarrow x^2 = \frac{\Delta - a}{a^2}$$

برای این که معادله جواب نداشته باشد، باید $\frac{\Delta - a}{a^2} < 0$ باشد:

$$\frac{\Delta - a}{a^2} < 0 \xrightarrow{a^2 > 0} \Delta - a < 0 \Rightarrow -a < -\Delta \Rightarrow a > \Delta$$

تنها $a = 6$ در این شرط صدق می‌کند. البته می‌توانستیم گزینه‌ها را هم امتحان کنیم. مثلاً با قرار دادن $a = -6$ در معادله داریم:

$$(-6)^2x^2 + (-6 - \Delta) = 0 \Rightarrow 36x^2 - 11 = 0 \Rightarrow 36x^2 = 11 \Rightarrow x^2 = \frac{11}{36} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

بنابراین بازای $x = -6$ معادله دو جواب دارد. پس قابل قبول نیست. بعد به همین ترتیب بقیه گزینه‌ها را هم امتحان کنیم.

$x = 0$ جواب معادله است. پس در آن صدق می‌کند:

$$0 + 0 - c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \text{معادله: } ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = -\frac{b}{a} > -3 \Rightarrow \frac{b}{a} < 3 \xrightarrow{a > 0} b < 3a \end{cases}$$

با فرض $x = -3 = t$ داریم:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -3 \Rightarrow \begin{cases} t - 3 = 2 \Rightarrow t = 5 = A \\ \text{یا} \\ t - 3 = -3 \Rightarrow t = 0 = B \end{cases} \Rightarrow 2A + B = 2(5) + 0 = 10$$

حواستان باشد که همان ۲ و ۳ را جواب معادله نگیرید و گزینه نادرست (۴) را انتخاب کنید.

نکته مهم: ماکه از تغییر متغیر حل نکردیم، همون معادله رو ساده کردیم و جواب‌ها رو به دست آوردیم. خیلی هم راحت تر بود! ببینید:

$$t^2 - 6t + 9 + t - 3 - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t(t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{یا} \\ t = 5 \end{cases}$$

پاسخ: آفرین! این بار رو درست گفتی. ما راه سخت تر رو نوشتیم تا اونم یاد بگیرید. الان روش تو راحت تر بود ولی وقتی ضرایب و عدد های ثابت معادله بزرگ باشن، روش ما خیلی بهتره. همین طور وقتی توان متغیر ۳ باشه، اون وقته که روش تغییر متغیر بهترین راه هله.

روش اول: ابتدا معادله $A^2 + 2A - 24 = 0$ را حل کرده و مقدار A را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 + 2A - 24 = 0 \Rightarrow (A - 4)(A + 6) = 0 \Rightarrow A = 4 \text{ یا } A = -6 \xrightarrow{A = 2x - 1} \begin{cases} 2x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \text{یا} \\ 2x - 1 = -6 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

روش دوم: مقدار $A = 2x - 1$ را در معادله قرار دهیم. بعد آن را حل کنیم:

$$(2x - 1)^2 + 2(2x - 1) - 24 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 - 24 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$$

$$x^2 - 13x^2 + 22x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(x^2 - 13x + 22) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x^2 - 13x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ (x - 11)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ یا } x = 2 \end{cases}$$

پس جواب بزرگتر معادله $x = 11$ و مربع آن ۱۲۱ است.

معادله را به شکلی که برای ما قابل حل باشد، تبدیل کنیم:

$$\underbrace{x^2 - x^2}_{\text{فاکتور از } x} - \underbrace{4x + 4}_{\text{فاکتور از } x} = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x - 1)} (x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{یا} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ جواب مثبت و ۱ جواب منفی است.

این معادله ظاهراً درجه ۴ است ولی می‌توان (با تغییر متغیر) آن را به معادله درجه ۲ تبدیل کرد و جواب‌های آن را به دست آورد. اگر فرض کنیم $x^2 = t$ باشد، آن‌گاه معادله به صورت $t^2 - 13t + 36 = 0$ درمی‌آید و داریم:

$$(t-4)(t-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ \text{یا} \\ t=9 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=4 \\ \text{یا} \\ x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ \text{یا} \\ x=\pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{۴ جواب دارد}$$

با فرض $x^2 = t$ داریم: ۱ ۵۱

$$t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow (t+1)(t+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ \text{یا} \\ t=-9 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=-1 \text{ غرق} \\ \text{یا} \\ x^2=-9 \text{ غرق} \end{cases}$$

پس این معادله هیچ جوابی ندارد!

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ \text{یا} \\ t=4 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ \text{یا} \\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

با فرض $x^2 = t$ داریم: ۲ ۵۲

پس بزرگ‌ترین جواب معادله $A = 2$ و کوچک‌ترین جواب آن $B = -2$ است و داریم:

$$A - B = 2 - (-2) = 4$$

۱ ۵۳

$$S = \frac{1}{4} \times 5 \times (2x + 6)$$

پس برای به دست آوردن مساحت، باید x را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورث داریم:

$$5^2 + (2x + 6)^2 = (\sqrt{19})^2 \Rightarrow 25 + 4x^2 + 24x + 36 = 19 \Rightarrow 4x^2 + 24x - 28 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ یا غرق} \text{ یا } x = 1$$

حال با داشتن $x = 1$ مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{4} \times 5 \times (2 \times 1 + 6) = \frac{1}{4} \times 5 \times 8 = 10$$

🧠 فکرم اچازما چرا گفتید جواب $x = -7$ قابل قبول نیست؟

پاسخ: باز از اون سوال‌هایی پرسیدی که اصلاً قبلش صورت به جواب فکر نکردی! قب گفته بودیم که $2x + 6$ طول ضلع مثلث نیست؟ به ازای $x = -7$ طول ضلع -8 می‌شه که قابل قبول نیست. چون طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه. تو این مدل سوال‌ها همیشه مواظبتون به این موضوع باشه.

عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم. پس داریم: ۱ ۵۴

$$x \xrightarrow{\text{مربع}} x^2 \xrightarrow{\text{چهار برابر}} 4x^2 \xrightarrow{\text{از ۱۲ برابر آن ۹ واحد کم‌تر}} 4x^2 = 12x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{3}$$

عدد مثبت را x فرض می‌کنیم. طبق مفروضات سؤال داریم: ۲ ۵۵

$$x \xrightarrow{\text{جمع با ۳}} x+3 \xrightarrow{\text{مجموع نصف شود}} \frac{x+3}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{جواب = ۴}} \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 9}{4} = 4 \xrightarrow{\times 4} x^2 + 6x + 9 = 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-1) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

اگر مساحت و محیط دایره را به ترتیب با S و P نشان دهیم، آن‌گاه با فرض r شعاع دایره داریم: ۲ ۵۶

$$S = \pi r^2 \quad , \quad P = 2\pi r \quad , \quad S = 2P + 12\pi$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = 2(2\pi r) + 12\pi \xrightarrow{:\pi} r^2 = 4r + 12 \Rightarrow r^2 - 4r - 12 = 0 \Rightarrow (r+2)(r-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \text{ غرق} \\ \text{یا} \\ r = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S - P = \pi r^2 - 2\pi r \xrightarrow{r=6} \pi(6)^2 - 2\pi(6) = 36\pi - 12\pi = 24\pi$$

در این تست، دو عدد مجهول داریم که آن‌ها را x و y در نظر می‌گیریم. رابطه بین آن‌ها را با توجه به توضیحات سؤال می‌نویسیم: ۳ ۵۷

$$x = 4y \quad , \quad xy = 4(x+y) \Rightarrow (4y)y = 4(4y+y) \Rightarrow y^2 = 4y + y \Rightarrow y^2 - 5y = 0$$

$$\Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ غرق} \text{ یا } y = 5 \Rightarrow x = 4y = 4(5) = 20 \Rightarrow x - y = 20 - 5 = 15$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (a+3)(a-1+5) = 56 \Rightarrow (a+3)(a+4) = 56 \Rightarrow a^2 + 7a + 12 = 56$$

۴ ۵۸

$$\Rightarrow a^2 + 7a - 44 = 0 \Rightarrow (a+11)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -11 & \text{غریبی} \\ \text{یا} \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(a-1)(a+3) \stackrel{a=4}{=} \frac{1}{2}(4-1)(4+3) = \frac{1}{2} \times 3 \times 7 = \frac{21}{2} = 10.5$$

مساحت مستطیل کوچک را پیدا کرده و از مساحت مستطیل بزرگ کم می‌کنیم:

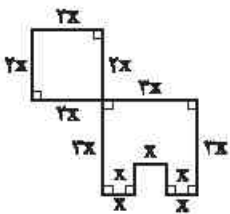
۱ ۵۹

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = (2x+1)(4x-1) - (2x-2)(2x+1) = 8x^2 + 2x - 1 - (4x^2 - 2x - 2)$$

$$= 8x^2 + 2x - 1 - 4x^2 + 2x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\stackrel{\text{مساحت}}{=} 4x^2 + 4x + 1 = 49 \Rightarrow 4x^2 + 4x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -4 \text{ غریبی}$$

۴ ۶۰



$$\text{محیط} = 4(2x) + 2(3x) + 5(x) = 8x + 9x + 5x = 22x$$

$$\text{مساحت} = \underbrace{(2x)^2}_{\text{مربع کوچک}} + \underbrace{((2x)x)}_{\text{مربع بزرگ}} - \underbrace{x^2}_{\text{مربع خالی شده}} = 4x^2 + 9x^2 - x^2 = 12x^2$$

$$\text{محیط} = \text{مساحت} \Rightarrow 22x = 12x^2 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} 22 = 12x \Rightarrow x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

ابتدا مساحت هر کدام از قسمت‌های رنگی را به دست می‌آوریم:

۲ ۶۱

$$\text{مساحت مربع کوچک} = t^2, \text{ مساحت مستطیل} = t \times 2t = 2t^2, \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \sqrt{2}t = t^2$$

حال مساحت مربع را به دست آورده و مجموع مساحت‌های قسمت‌های رنگی را از آن کم می‌کنیم:

$$\text{مساحت باقی مانده} = 6^2 - (t^2 + 2t^2 + t^2) = 24 \Rightarrow 36 - 4t^2 = 24 \Rightarrow 4t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 3 \stackrel{t > 0}{\Rightarrow} t = \sqrt{3}$$

۱ ۶۲

$$\text{مساحت مربع} = x^2$$

$$\text{مثلاً در فیثاغورث: } y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}x^2 \quad (*)$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}y \times y = \frac{1}{2}y^2 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x \right)^2 = \pi \left(\frac{1}{2\pi}x^2 \right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مساحت‌ها} = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} = \left(\frac{4+1+2}{4} \right) x^2 = \frac{7}{4}x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = 4 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 2 \Rightarrow \text{محیط مربع} = 4x = 4 \times 2 = 8$$

ضریب x^2 برابر ۱ است، پس کافی است مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه کنیم:

۲ ۶۳

$$\left(-\frac{1}{4} \right)^2 = 4^2 = 16$$

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

۳ ۶۴

$$2x^2 + x + 1 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1$$

حال باید مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه کنیم:

۲ ۶۵

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = -5 \Rightarrow x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2} \right)^2 = -5 + \frac{64}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{8}{2} \right)^2 = -5 + 16 = 11$$

حال باید از عدد ۱۱ در سمت راست تساوی جذر بگیریم.

۲ ۶۶

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 2 + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{17}{4} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

پس در مرحله پنجم از عدد $\frac{17}{4}$ جذر گرفتیم.